

鎖の形と数の定和性に関する問題

野田明男

(数 学)

A Problem Concerning a Chain of m Circles with a Property of Constant Sum

Akio NODA

Mathematics

Abstract: Let us consider a problem concerning a chain of m circles with a property of constant sum ; indeed, we are requested to seek a permutation $(a_i)_{i=0}^{2m-1}$ of $2m$ integers $\{0, 1, 2, \dots, 2m-1\}$ which satisfies the following condition :

$$(1) \ a_0 + a_1 + a_2 = a_2 + a_3 + a_4 = \dots = a_{2m-2} + a_{2m-1} + a_0.$$

Behind such a problem in combinatorial mathematics, there exists an interesting graph structure, and in the cases of $3 \leq m \leq 7$, the author was successful in listing up all solutions (a_i) with constant sum (1). In addition, he discusses related problems from a viewpoint of random permutations.

Key words: permutation, random permutation, cycle in a graph, property of constant sum.

§ 1. 問題および結果

魔法陣などのように、予め定められた配置に数をおいて、和を一定にする問題は古くから知られている (例えば、[1] 参照)。この数の定和性に関する問題をここでは、鎖の形を用いて考究する。

主たる問題として、 m 個の輪からなる鎖を図Aのように円状につなげ、鎖の中に生じた $2m$ 個の領域に0から $2m-1$ までの整数を入れて、輪の中にある3つの数の和をすべて等しくする問題を取りあげる ($m \geq 3$)。すなわち、 $2m$ 個の領域に入れるべき数を順次時計回りに、

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2m-2}, a_{2m-1}$$

と書くとき、0から $2m-1$ までの数の置換で、次の等式をみたす $(a_i)_{i=0}^{2m-1}$ をすべて探すことになる：

$$(1) \quad a_0 + a_1 + a_2 = a_2 + a_3 + a_4 = \cdots = a_{2m-2} + a_{2m-1} + a_0.$$

この条件 (1) は、1 次変換 $y = \alpha + \beta x$ に関して不変なので、 a_i の値域を、等差数列をなす $2m$ 個の数 $\{\alpha + \beta k; k = 0, 1, 2, \dots, 2m-1\}$ に一般化してもよい。また、回転不変性および、反時計回りに回り方を変更しても条件 (1) は変わらないので、次の条件 (2) あるいは (2') を付け加えることが、われわれの問題定式化には都合がよい：

$$(2) \quad a_0 = 0, \quad a_1 < a_{2m-1};$$

$$(2') \quad a_1 = 0, \quad a_2 < a_0$$

問題 1. 0 から $2m-1$ までの数の置換 (a_i) で (1) と (2) あるいは (1) と (2') をみたすものは全部で何個あるか。この解の集合を Ω_m で表し、その個数を $C_m = |\Omega_m|$ と書く。

(2) や (2') の条件をはずして、(1) だけをみたす置換 (a_i) は、もちろん $2m$ C_m 通り生じること注意到しよう。

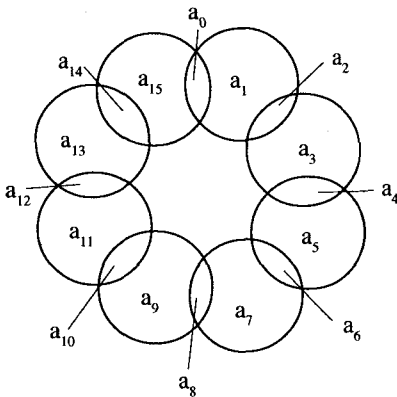


図 A ($m=8$ の場合)

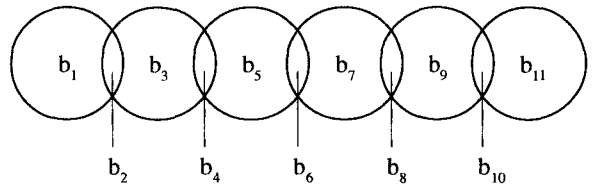


図 B ($m=6$ の場合)

さて、鎖を円状につなげた形の図 A から生じる問題 1 は、それと対をなす問題 2 をもっている。一列をなす m 個の輪からなる鎖には、上の図 B をみてもわかるように、 $2m-1$ 個の領域が生じる。各領域に 1 から $2m-1$ までの整数を入れて、輪の中の数の和を一定にしたい。すなわち、1 から $2m-1$ までの数の置換 $(b_i)_{i=1}^{2m-1}$ で、左から順に

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_{2m-2}, b_{2m-1}$$

と入れて、定和性の等式

$$(3) \quad b_1 + b_2 = b_2 + b_3 + b_4 = \cdots = b_{2m-4} + b_{2m-3} + b_{2m-2} = b_{2m-2} + b_{2m-1}$$

が成り立つものを探す。このとき、左右の入れ換えでも条件 (3) は変わらない点を考慮すれば、付加条件

$$(4) \quad b_1 < b_{2m-1}$$

を課すことになる。

問題 2. 1 から $2m-1$ までの数の置換 (b_i) で、条件 (3) と (4) をみたすものは全部で何個あるか。この解の集合を Ω'_m で表し、その個数を $D_m = |\Omega'_m|$ と書く。

この Ω'_m は問題 1 の Ω_m の中に埋め込まれる。つまり、 $(b_i)_{i=1}^{2m-1} \in \Omega'_m$ に対し、 $b_0 = 0$ とおいて 0 から $2m-1$ までの置換 $(b_i)_{i=0}^{2m-1}$ を作ると、 $(b_i)_{i=0}^{2m-1}$ は明らかに (2) 式をみたす Ω_m の要素である。別の言い方をすると、 $a_0 = 0$ の入る領域で円状の鎖を切断して一列にすれば、問題 1 が問題 2 に姿を変えることになる。こうして、(1) と (2) をみたす置換 $(b_i)_{i=0}^{2m-1}$ は D_m 個存在し、他方 (1) と (2') をみたす置換 $(b_i)_{i=0}^{2m-1}$ は $(C_m - D_m)$ 個存在する。

われわれの得た結果は次の表にまとめられる。

定理

m	3	4	5	6	7
C_m	4	6	6	20	116
D_m	2	4	4	10	65

この定理の証明は、§ 2 で述べられる。そこでくわしく説明するように、3 つの数の和を一定にする操作に伴って生じるグラフ構造を明らかにし、正 m 角形の対角線全体のなすグラフ H_m と同型の部分グラフをすべて見出すことが、われわれの問題解決への鍵となる。また、解集合 Ω_m の要素を具体的に列挙することは、証明の該当する箇所ではなされる。

すべての m について、 C_m と D_m を決定する仕事は、今の所著者の手に負えぬ難物であるが、組合せ問題への確率論的アプローチ ([3] と [4] 参照) に示唆を受けて、§ 3 においてランダムな置換の観点から、われわれの定和性問題をながめ直す。

§ 2. 問題に付随するグラフ構造；定理の証明

0 から $2m-1$ までの数の置換 $(a_i)_{i=0}^{2m-1}$ が定和性の条件 (1) をみたすとき、(1) の共通の値を s とおいて s の値域をまず確定する。

$$ms = \sum_{i=0}^{2m-1} a_i + \sum_{j=0}^{m-1} a_{2j} = m(2m-1) + \sum_{j=0}^{m-1} a_{2j},$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} j = \frac{m(m-1)}{2} \leq \sum_{j=0}^{m-1} a_{2j} \leq \sum_{j=m}^{2m-1} j = \frac{m(3m-1)}{2}$$

に注意すると、

$$(5) \quad \left\lceil \frac{5m-3}{2} \right\rceil \leq s \leq \left\lfloor \frac{7m-3}{2} \right\rfloor$$

を得る ($\lceil x \rceil$ は $n \geq x$ となる最小の整数、 $\lfloor x \rfloor$ は $n \leq x$ となる最大の整数を表す)。

また、 (a_i) が (1) を値 s でみたすとき、新しい置換を

$$(6) \quad \tilde{a}_i = 2m-1-a_i, \quad i = 0, 1, \dots, 2m-1,$$

で定めれば、 (\tilde{a}_i) も値 $3(2m-1)-s (= \tilde{s} \text{ とおく})$ で (1) をみたす。ここで、 $\tilde{a}_{i_0} = 0$ となる番号 i_0 は、 $a_{i_0} = 2m-1$ から定まり、回転および向きの逆転を必要なら (\tilde{a}_i) に加えることによって、付加条件 (2), (2') が保存されるような置換 $(b_i)_{i=0}^{2m-1}$ を導くことができる。こうして定まる Ω_m 上の対合 $I: (a_i) \rightarrow (b_i)$, I^2 は恒等変換、に留意して、 Ω_m の部分集合を 4 つのタイプに分けて調べて行く。

$$\alpha_m(s) = \{ (a_i) \in \Omega_m; (1) \text{ の値が } s \text{ に等しく、} a_0 = 0 \text{ そして } a_{i_0} = 2m-1 \text{ となる}$$

番号 i_0 は偶数 } ,

$$\beta_m(s) = \{ (a_i) \in \Omega_m; (1) \text{ の値が } s \text{ に等しく、} a_0 = 0 \text{ そして } a_{i_0} = 2m-1 \text{ となる}$$

番号 i_0 は奇数 } ,

$$\gamma_m(s) = \{ (a_i) \in \Omega_m; (1) \text{ の値が } s \text{ に等しく、} a_1 = 0 \text{ そして } a_{i_0} = 2m-1 \text{ となる}$$

番号 i_0 は偶数 } ,

$$\delta_m(s) = \{ (a_i) \in \Omega_m; (1) \text{ の値が } s \text{ に等しく、} a_1 = 0 \text{ そして } a_{i_0} = 2m-1 \text{ となる}$$

番号 i_0 は奇数 } ;

$$\Omega_m = \bigcup_{s=\left\lceil \frac{5m-3}{2} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{7m-3}{2} \right\rfloor} \{ \alpha_m(s) \cup \beta_m(s) \cup \gamma_m(s) \cup \delta_m(s) \}$$

であり、問題2の解集合 Ω'_m は $\bigcup_{s=\lceil \frac{5m-3}{2} \rceil}^{\lceil \frac{7m-3}{2} \rceil} \{\alpha_m(s) \cup \beta_m(s)\}$ と 1 : 1 に対応している。

補題1. (6) から導かれる Ω_m 上の対合 I は、 $\alpha_m(s) \rightarrow \alpha_m(\tilde{s}), \beta_m(s) \rightarrow \gamma_m(\tilde{s}), \gamma_m(s) \rightarrow \beta_m(\tilde{s}), \delta_m(s) \rightarrow \delta_m(\tilde{s})$ 上の変換をそれぞれ引き起こす。

補題1によって、(5) の範囲の半分、つまり

$$(5') \quad \left\lceil \frac{5m-3}{2} \right\rceil \leq s \leq 3m-2$$

をみtas s について、各解集合 $\alpha_m(s), \beta_m(s), \gamma_m(s), \delta_m(s)$ を調べればよい；

$$(7) \quad C_m = 2 \sum_{s=\lceil \frac{5m-3}{2} \rceil}^{3m-2} \{|\alpha_m(s)| + |\beta_m(s)| + |\gamma_m(s)| + |\delta_m(s)|\}$$

$$(8) \quad D_m = \sum_{s=\lceil \frac{5m-3}{2} \rceil}^{3m-2} \{2|\alpha_m(s)| + |\beta_m(s)| + |\gamma_m(s)|\}$$

を得る。

ここで、 $m = 2k+1 (k=1, 2, 3, \dots)$ の場合、 $\beta_{2k+1}(5k+1) \neq \phi, \gamma_{2k+1}(7k+2) \neq \phi$ を示そう。

補題2. 奇数の m に対し、 $C_m \geq 2, D_m \geq 1$ となる。

証明 $m=2k+1$ のとき、次式で定義される置換 (a_i) は $\beta_{2k+1}(5k+1)$ に属する：

$a_0 = 0, a_{4j} = j, a_{4j-2} = k+j (j=1, 2, \dots, k)$, そして

$a_{2j-1} = 4k-j+1 (j=1, 2, \dots, 2k), a_{4k+1} = 4k+1$ 。さらに、補題1を適用すれば、 $\gamma_{2k+1}(7k+2) \neq \phi$ がわかる。

注意 $m=2k$ の偶数の場合、すべての $k \geq 2$ にわたって、 $\beta_{2k}(5k-1)$ に属する置換を指し示す表現式を得ることに成功していない。例えば、 $04531627 \in \beta_4(9), 06851\bar{1}29374\bar{0} \in \beta_6(14), 08\bar{1}71\bar{5}3\bar{0}694\bar{3}22\bar{5}4 \in \beta_8(19), 00\bar{4}91\bar{9}42\bar{8}3\bar{3}6\bar{5}7\bar{2}5\bar{7}1\bar{6}8 \in \beta_{10}(24)$ (ここで \bar{n} は $10+n$ を表す) という事実に留意して、特性「 $a_0 = 0, a_1 = 2k, a_2 = 3k-1, a_3 = 2k-1, a_4 = 1$ で始まり、以下偶数番目の a_{2i} には2から $2k-2$ までの小さい数が入り、奇数番目の a_{2i-1} には残りの大きい数 ($3k$ から $4k-1$ までの数と $2k+1$ から $3k-2$ までの数) が入る」

によって規定される置換 $(a_i) \in \beta_{2k}(5k-1)$ を予想した。けれども、 $k \geq 6$ に対しては見通しが

きかないのが現状である。

さて、解集合 Ω_m に付随するグラフ構造へ話を進めよう。以下グラフ理論の用語を適宜使用する ([2] ~ [4] 参照)。まず (5') の範囲の各 s に対し、0 から $2m-1$ までの数の中から 3 つの数 $x, y, z (x < y < z)$ を選んで、 $x+y+z=s$ となるものをすべて列挙する。3 つの数の組 $\{x, y, z\}$ を単に xyz と記す。説明の便宜上、 $m=4$ の場合を事例としてくわしく書く。

イ) $s=9$ のとき：027, 036, 045, 126, 135, 234 の 6 通り；

ロ) $s=10$ のとき：037, 046, 127, 136, 145, 235 の 6 通り。

これら 6 とおりの 3 つの数の組 xyz を頂点にもつ (無向) グラフ $G(s)$ を考える。2 つの頂点 xyz と $x'y'z'$ は、同じ数を共有していれば辺で結ばれ、そうでなければ辺で結ばれない。こうして定まるグラフ $G(s)$ から、長さ $m (= 4)$ のサイクル

$x_0y_0z_0 - x_1y_1z_1 - x_2y_2z_2 - x_3y_3z_3 - x_0y_0z_0$ で、0 から $2m-1$ までの数がすべて x_i, y_i, z_i のうちのどこかに現われるものを探す。この性質は、隣り合わない頂点同士が辺で結ばれてはいけないことと同値である。

われわれはグラフ $G(s)$ 自身よりもむしろその補グラフ $\overline{G}(s)$ に着目する。この $\overline{G}(s)$ は、任意の頂点同士がすべて辺で結ばれる完全グラフ K_6 に関する $G(s)$ の補グラフであり、 $G(s)$ とは反対に互いに素な 2 頂点 xyz と $x'y'z'$ とが辺で結ばれる。 $m=4$ の場合、

イ) $\overline{G}(9)$ の辺は、027 - 135 と 045 - 126 の 2 本；

ロ) $\overline{G}(10)$ の辺は、037 - 145, 046 - 127 と 046 - 235 の 3 本からなっている。

われわれの問題は、正 $m (= 4)$ 角形の対角線全体のなすグラフ H_m と同型な $\overline{G}(s)$ の部分グラフをすべて見つけることに帰着される。従って、正方形の対角線 $v_1^4 \times v_3^4$ と同型な部分グラフは、

イ) $s=9$ のとき、 $v_1 = 027, v_2 = 126, v_3 = 135, v_4 = 045$ となる。

これから、 $G(9)$ における求めるべき長さ 4 のサイクルは、条件 (2) を考慮して

045 - 135 - 126 - 027 - 045 であり、0 から 7 までの数の置換

$a_0a_1a_2 \cdots a_7 = 04531627 \in \beta_4(9)$ に到達する。(サイクルの出発点と向きは、条件 (2) または (2') によって一意的に決定されることに注意しよう。) 他方、

ロ) $s=10$ のとき、求める $\overline{G}(10)$ の部分グラフは、 $v_1 = 037, v_2 = 127, v_3 = 145, v_4 = 046$ と $v_1 = 037, v_2 = 235, v_3 = 145, v_4 = 046$ の 2 種類存在する。これらに対応する $G(10)$ におけるサイクル 037 - 127 - 145 - 046 - 037 と 046 - 145 - 235 - 037 - 046、そして解 $03721546 \in \alpha_4(10)$ と $06415237 \in \beta_4(10)$ をそれぞれ見出す。

以上の解に加えて、補題 1 を使えば、 $03721546 \in \alpha_4(10)$ から $04713265 \in \alpha_4(11)$ を、 $06415237 \in \beta_4(10)$ から $70452631 \in \gamma_4(11)$ を、そして $04531627 \in \beta_4(9)$ から $70516423 \in \gamma_4(12)$ を導く。

こうして $m=4$ の場合、次の表の形にまとめられる結果を得、(7)、(8) 式から $C_4 = 6, D_4 = 4$

という定理の主張が証明される。

s	9	10	11	12	計
$ \alpha_4(s) $	0	1	1	0	2
$ \beta_4(s) $	1	1	0	0	2
$ \gamma_4(s) $	0	0	1	1	2
$ \delta_4(s) $	0	0	0	0	0

この節の残りで、同じ方法に沿って $m = 3, 5, 6, 7$ の各場合を議論する。

$m = 3$ の場合 イ) $s = 6$ のとき、015,024,123 の3頂点をもつ完全グラフ $G(6) = K_3$ を得、明らかに長さ3のサイクルは一つであり、解 $042315 \in \beta_3(6)$ を見出す。また、

ロ) $s = 7$ のときも、025,034,124 の3頂点をもつ完全グラフ $G(7) = K_3$ から、解 $034125 \in \beta_3(7)$ を得る。

補題1によって、 $503412 \in \gamma_3(8)$ と $504231 \in \gamma_3(9)$ を見出し、 $C_3 = 4, D_3 = 2$ と結論される。

$m = 5$ の場合に移る。

イ) $s = 11$ のとき：補グラフ $\bar{G}(11)$ の頂点は、029,038,047,056,128,137,146,236,245 の9個。辺は次の9本からなる：029-137, 029-146, 038-146, 038-245, 047-128, 047-236, 056-128, 056-137, 137-245。正五角形の対角線がなすグラフ H_5 は星形を構成し、長さ5のサイクル $v_1 - v_3 - v_5 - v_2 - v_4 - v_1$ によって表現される。この事実から、 H_5 と同型な $\bar{G}(11)$ の部分グラフは、1種類 038-146-029-137-245-038 であることがわかる。もとのグラフ $G(11)$ における長さ5のサイクルは、038-137-146-245-029-038 であるので、解 $0837164529 \in \beta_5(11)$ を見出す。

ロ) $s = 12$ のとき： $\bar{G}(12)$ の頂点は、039,048,057,129,138,147,156,237,246,345 の10個。辺は、039-147, 039-156, 039-246, 048-129, 048-156, 048-237, 057-129, 057-138, 057-246, 129-345, 138-246, 156-237 の12本。 H_5 と同型な $\bar{G}(12)$ の部分グラフは存在しないことがわかる。

ハ) $s = 13$ のとき： $\bar{G}(13)$ の頂点は、049,058,067,139,148,157,238,247,256,346 の10個。辺は、049-157, 049-238, 049-256, 058-139, 058-247, 058-346, 067-139, 067-148, 067-238, 139-247, 139-256, 148-256, 157-238, 157-346 の14本。 H_5 と同型な $\bar{G}(13)$ の部分グラフは2種類：067-238-049-256-148-067 と 067-238-049-256-139-067。対応する解は、それぞれ $0765238149 \in \beta_5(13)$, $0765283194 \in \alpha_5(13)$ となる。

補題1に訴えて、 $s=14$ のときの解は、 $9058167432 \in \gamma_5(14)$ と $0592347168 \in \alpha_5(14)$ 。 $s=15$ のときは解なし。 $s=16$ のときは、 $9074538261 \in \gamma_5(16)$ を得る。以上をまとめると、次の表を

得て、定理の主張 $C_5 = 6, D_5 = 4$ が示される。

s	11	12	13	14	15	16	計
$ \alpha_s(s) $	0	0	1	1	0	0	2
$ \beta_s(s) $	1	0	1	0	0	0	2
$ \gamma_s(s) $	0	0	0	1	0	1	2
$ \delta_s(s) $	0	0	0	0	0	0	0

$m = 6$ の場合 $3 \leq m \leq 5$ に対してはいずれも $\delta_m(s) = \emptyset$ であったが、 $m = 6$ になって初めて 4 つのタイプの解が出揃うことを見よう。以下、10, 11 は $\bar{0}, \bar{1}$ で表される。

イ) $s = 14$ のとき: $\bar{G}(14)$ は、 $03\bar{1}$ から 356 までの 14 個の頂点および、 $03\bar{1} - 149$ 以下 248 - 356 までの 33 本の辺から構成される。正六角形の対角線全体がなすグラフ H_6 と同型な $\bar{G}(14)$ の部分グラフをもれなく見つけるため、次の方式に従って進んで行く。まず、最小次数の頂点の一つ (例えば、次数 4 の $13\bar{0}$) v_1 に選び、 v_1 と辺で結ばれる 3 頂点の組 $\{v_3, v_4, v_5\}$ で $v_3 - v_5$ となっているものに着目し、次いで v_4 と辺で結ばれる 2 頂点 $\{v_2, v_6\}$ で残りの条件 $v_2 - v_6, v_2 - v_5, v_3 - v_6$ をみたすものをすべて探す。探し尽した後、 $13\bar{0}$ を頂点にもつような H_6 と同型の部分グラフはもうないので、 $13\bar{0}$ と結ばれる辺は不要になり、 $\bar{G}(14)$ からすべて消去する。こうして導かれたグラフ $\bar{G}'(14)$ から、改めて最小次数の頂点を 1 つ (次数 4 の 149) v_1 に選び、同じ操作を実行し、くり返す。

このような手順によって、われわれは $G(14)$ における長さ 6 のサイクルを 3 種類見出す：
 $068-158-12\bar{1}-239-347-04\bar{0}-068$, $068-356-257-12\bar{1}-149-04\bar{0}-068$,
 そして $059-356-167-12\bar{1}-248-04\bar{0}-059$; 対応する解はいずれも $\beta_6(14)$ に属し、
 $06851\bar{1}29374\bar{0}$, $0863572\bar{1}194\bar{0}$, そして $0953671\bar{1}284\bar{0}$ となる。

ロ) $s = 15$ のとき: $\bar{G}(15)$ は、 $04\bar{1}$ から 456 までの 15 個の頂点および、 $04\bar{1} - 159$ 以下 $267-348$ までの 39 本の辺で構成されることがわかる。イ) と同じ手順で、このグラフ $G(15)$ は長さ 6 のサイクル $069-249-14\bar{0}-13\bar{1}-357-078-069$ を 1 つ含み、対応する解 $06924\bar{0}1\bar{1}3578 \in \beta_6(15)$ に至る。

ハ) $s = 16$ のとき: $\bar{G}(16)$ は、 $05\bar{1}$ から 457 までの 15 個の頂点および、 $05\bar{1} - 169$ 以下 $268-457$ までの 41 本の辺からなる。イ) ロ) に比べて、このグラフはいろいろなタイプの解を産み出すことが示される。事実、

$$05\bar{1}14\bar{0}286379, 097541\bar{1}3286\bar{0} \in \alpha_6(16);$$

$$06\bar{0}42\bar{1}358179, 09736824\bar{0}15\bar{1} \in \beta_6(16);$$

$$\bar{0}0682\bar{1}394751, \bar{0}06917853\bar{1}24 \in \delta_6(16)$$

を見出す。

$17 \leq s \leq 19$ の範囲の解は、補題 1 によって導かれる：

ニ) $s = 17$ のとき： $06\bar{1}24853917\bar{0}$, $089351\bar{1}2467\bar{0} \in \alpha_6(17)$;

$\bar{1}060\bar{1}7935842$, $90863042\bar{1}517 \in \gamma_6(17)$;

$90827460\bar{1}153$, $908634025\bar{1}17 \in \delta_6(17)$ 。

ホ) $s = 18$ のとき： $\bar{0}08643\bar{1}52971 \in \gamma_6(18)$ 。

ヘ) $s = 19$ のとき： $\bar{0}0928471\bar{1}536$, $\bar{0}09371\bar{1}26854$, $\bar{0}0946853\bar{1}172 \in \gamma_6(19)$ 。

以上をまとめると、次の表の結果を得、同時に定理の主張 $C_6 = 20, D_6 = 10$ を導く。

s	14	15	16	17	18	19	計
$ \alpha_6(s) $	0	0	2	2	0	0	4
$ \beta_6(s) $	3	1	2	0	0	0	6
$ \gamma_6(s) $	0	0	0	2	1	3	6
$ \delta_6(s) $	0	0	2	2	0	0	4

$m = 7$ の場合に移ると、付随するグラフ構造は一段と複雑さを増し、解集合 Ω_7 の豊富さに驚かされる。事実、次の結果を証明することができる。

s	16	17	18	19	20	21	22	23	計
$ \alpha_7(s) $	0	0	4	10	10	4	0	0	28
$ \beta_7(s) $	9	9	4	13	2	0	0	0	37
$ \gamma_7(s) $	0	0	0	2	13	4	9	9	37
$ \delta_7(s) $	0	0	3	4	4	3	0	0	14

これから、(7) (8) によって定理の $C_7 = 116, D_7 = 65$ が結論される。

われわれが Ω_7 の要素をもれなく見出す方法は、基本的に $m = 6$ の場合と同じである。補グラフ $\bar{G}(s)$ において、正 7 角形の対角線がなすグラフ H_7 と同型な部分グラフを一定の方式で順序よく求めて行けばよい。ここではその詳細は省き、得られた Ω_7 の要素 $a_0 a_1 a_2 \cdots a_{12} a_{13}$ を記載するだけにとどめたい。以下リストの順序は、0 を先頭にする辞書式順序に従い、 \bar{n} で $10 + n$ の数を表す。

イ) $s = 16$ のとき： $\beta_7(16)$ の 9 つの解は以下の通り。

$0067385923\bar{1}142$; $006829574\bar{1}1233$; $006823\bar{1}239475\bar{1}$; $0069132\bar{1}385742$;
 $0\bar{1}574028691233$; $0\bar{1}583769132042$; $0\bar{1}50\bar{1}328673942$; $024750\bar{1}9682\bar{1}33$;
 $024\bar{1}105928673\bar{3}$

ロ) $s = 17$ のとき: $\beta_7(17)$ の 9 つの解は以下の通り。

$06\bar{1}519782\bar{2}30\bar{4}\bar{3}$; $07\bar{0}52\bar{1}4\bar{2}\bar{1}3\bar{3}689$; $08926740\bar{3}3\bar{1}\bar{1}5\bar{2}$; $09827640\bar{3}3\bar{1}\bar{1}5\bar{2}$;
 $00\bar{7}286395\bar{1}\bar{1}2\bar{4}\bar{3}$; $00\bar{7}826935\bar{1}\bar{1}2\bar{4}\bar{3}$; $0\bar{1}62971\bar{3}30\bar{4}85\bar{2}$; $0\bar{2}5\bar{1}\bar{1}7926830\bar{4}\bar{3}$;
 $0\bar{2}5\bar{1}\bar{1}9728630\bar{4}\bar{3}$

ハ) $s = 18$ のとき: $\alpha_7(18)$ の 4 つの解は次の通り。

$05\bar{3}14\bar{1}387920\bar{6}\bar{2}$; $05\bar{3}14\bar{2}20\bar{6}9387\bar{1}$; $05\bar{3}32\bar{2}468910\bar{7}\bar{1}$; $00\bar{8}914\bar{3}32\bar{1}576\bar{2}$

$\beta_7(18)$ の 4 つの解は次の通り。

$00\bar{8}372954\bar{3}\bar{1}\bar{1}6\bar{2}$; $00\bar{8}91\bar{3}4\bar{3}\bar{1}2576\bar{2}$; $0\bar{1}783960\bar{2}4\bar{2}\bar{1}5\bar{3}$; $0\bar{2}620\bar{1}783\bar{1}495\bar{3}$

最後に $\delta_7(18)$ の 3 つの解は次の通り。

$20684\bar{1}3\bar{3}2970\bar{1}5$; $2060\bar{2}9783\bar{1}4\bar{3}\bar{1}5$; $0084693\bar{3}2\bar{1}5\bar{2}\bar{1}7$

ニ) $s = 19$ のとき: $\alpha_7(19)$ の 10 個の解は次の通り。

$06\bar{3}1504\bar{2}37928\bar{1}$; $06\bar{3}15\bar{1}3\bar{2}47829\bar{0}$; $06\bar{3}15\bar{1}3\bar{2}48720\bar{9}$; $06\bar{3}24\bar{2}35\bar{1}7180\bar{9}$;
 $06\bar{3}42\bar{2}53\bar{1}7180\bar{9}$; $090\bar{3}62\bar{1}5\bar{3}2478\bar{1}$; $09063\bar{1}5\bar{1}3\bar{2}487\bar{2}$; $09063\bar{2}42\bar{3}517\bar{1}8$;
 $00973\bar{2}42\bar{3}\bar{1}568\bar{1}$; $0\bar{1}80\bar{1}5\bar{3}24693\bar{7}\bar{2}$

$\beta_7(19)$ の 13 個の解は次の通り。

$07\bar{2}163054\bar{3}298\bar{1}$; $07\bar{2}3450\bar{1}892\bar{1}6\bar{3}$; $07\bar{2}34\bar{3}2\bar{1}65810\bar{9}$; $07\bar{2}52\bar{3}49630\bar{1}8\bar{1}$;
 $08\bar{1}\bar{1}70\bar{2}5\bar{2}3496\bar{3}$; $08\bar{1}\bar{1}71\bar{3}52\bar{2}3469\bar{0}$; $08\bar{1}\bar{1}71\bar{3}52\bar{2}4360\bar{9}$; $090\bar{1}8743\bar{2}52\bar{1}6\bar{3}$;
 $090\bar{1}8742\bar{3}5\bar{1}26\bar{3}$; $090\bar{3}61\bar{2}52\bar{3}478\bar{1}$; $090\bar{7}2\bar{3}43\bar{2}\bar{1}658\bar{1}$; $0\bar{1}810\bar{7}25\bar{2}3496\bar{3}$;
 $0\bar{1}89270\bar{5}43\bar{2}\bar{1}6\bar{3}$

$\gamma_7(19)$ の 2 つの解は次の通り。

$306580\bar{1}\bar{1}793\bar{2}42$; $306\bar{1}28973\bar{2}40\bar{5}\bar{1}$

最後に $\delta_7(19)$ の 4 つの解は次の通り。

$207\bar{1}\bar{1}80\bar{3}694\bar{3}25$; $10892\bar{3}450\bar{3}62\bar{1}7$; $00964\bar{3}2\bar{2}53\bar{1}718$; $00973\bar{2}43\bar{2}\bar{1}658\bar{1}$

ホ) $s = 20$ のとき: $\alpha_7(20)$ の 10 個の解は次の通り。

$07\bar{3}25\bar{1}46\bar{0}1938\bar{2}$; $07\bar{3}34\bar{1}5691\bar{0}28\bar{2}$; $07\bar{3}435\bar{2}628\bar{0}19\bar{1}$; $07\bar{3}435\bar{2}62\bar{0}81\bar{1}9$;
 $07\bar{3}43\bar{1}6591\bar{0}28\bar{2}$; $08\bar{2}17\bar{0}34\bar{3}2569\bar{1}$; $08\bar{2}625\bar{3}437\bar{0}19\bar{1}$; $08\bar{2}352\bar{3}16\bar{0}479\bar{1}$;
 $0\bar{1}91\bar{0}643\bar{3}2578\bar{2}$; $0\bar{1}9561\bar{3}437\bar{0}28\bar{2}$

$\beta_7(20)$ の 2 つの解は次の通り。

$0\bar{1}91\bar{0}462\bar{2}3587\bar{3}$; $0\bar{2}8391\bar{0}645\bar{1}27\bar{3}$

$\gamma_7(20)$ の 13 個の解は次の通り。

$\bar{3}072\bar{1}45\bar{2}389\bar{0}16$; $\bar{3}072\bar{1}81\bar{0}965\bar{2}34$; $\bar{3}0749\bar{0}18\bar{1}36\bar{2}25$; $\bar{3}0749\bar{0}18\bar{1}63\bar{2}52$;
 $\bar{3}07\bar{1}28\bar{0}1965\bar{2}34$; $\bar{3}07\bar{2}1\bar{0}9836\bar{1}45\bar{2}$; $\bar{2}08\bar{1}19\bar{0}734\bar{3}526$; $\bar{2}08\bar{1}1\bar{0}9743\bar{3}526$;
 $\bar{1}0947\bar{0}3\bar{2}52\bar{3}618$; $\bar{1}0965\bar{2}343\bar{0}7\bar{2}18$; $\bar{1}0983\bar{0}7\bar{2}16\bar{3}254$; $\bar{1}09\bar{0}16\bar{3}43\bar{2}587\bar{2}$;
 $\bar{1}09\bar{0}1\bar{2}785\bar{2}3436$

最後に $\delta_7(20)$ の 4 つの解は次の通り。

$\bar{1}091\bar{0}64\bar{3}3\bar{2}587\bar{2}$; $\bar{1}0947\bar{0}35\bar{2}26\bar{3}18$; $\bar{1}0974\bar{3}35\bar{2}62\bar{0}81$; $\bar{1}0983\bar{0}71\bar{2}62\bar{3}54$

へ) $s = 21$ のとき: $\alpha_7(21)$ の 4 つの解は次の通り。

$08\bar{3}173\bar{1}465\bar{0}29\bar{2}$; $08\bar{3}263\bar{2}45791\bar{1}0$; $08\bar{3}265\bar{0}473\bar{1}19\bar{2}$; $09\bar{2}453\bar{3}17682\bar{1}0$

$\gamma_7(21)$ の 4 つの解は次の通り。

$\bar{3}08492\bar{0}56\bar{2}3\bar{1}71$; $\bar{3}08\bar{2}19\bar{1}374\bar{0}562$; $\bar{2}0984\bar{1}6\bar{0}53\bar{3}172$; $\bar{2}09\bar{0}2\bar{1}8671\bar{3}354$

最後に $\delta_7(21)$ の 3 つの解は次の通り。

$\bar{2}092\bar{0}564\bar{1}37\bar{3}18$; $\bar{1}00\bar{2}957\bar{3}18\bar{2}364$; $\bar{1}004795\bar{3}36\bar{2}182$

ト) $s = 22$ のとき: $\gamma_7(22)$ の 9 つの解は以下の通り。

$\bar{3}091\bar{2}284\bar{0}75\bar{1}63$; $\bar{3}091\bar{2}28\bar{0}47\bar{1}563$; $\bar{3}093\bar{0}1\bar{1}564\bar{2}827$; $\bar{3}093\bar{0}57\bar{1}46\bar{2}281$;
 $\bar{3}093\bar{0}75\bar{1}64\bar{2}281$; $\bar{2}0039581\bar{3}27\bar{1}46$; $\bar{2}003967\bar{1}45\bar{3}182$; $\bar{2}003976\bar{1}54\bar{3}182$;
 $\bar{2}00754\bar{3}638\bar{1}291$

チ) $s = 23$ のとき: $\gamma_7(23)$ の 9 つの解は以下の通り。

$$\begin{aligned} & \bar{3}00\bar{1}2\bar{2}9684\bar{1}573; \bar{3}00\bar{1}2475\bar{1}39682; \bar{3}002\bar{1}574\bar{2}38691; \bar{3}00675\bar{1}483\bar{2}291; \\ & \bar{2}0\bar{1}2\bar{0}58691\bar{3}374; \bar{2}0\bar{1}391\bar{3}285\bar{0}674; \bar{2}0\bar{1}485\bar{0}673\bar{3}192; \bar{2}0\bar{1}573\bar{3}28694\bar{0}1; \\ & \bar{2}0\bar{1}576\bar{0}491\bar{3}283 \end{aligned}$$

以上で $m = 7$ の場合の解はすべて列挙された。

§ 3. ランダムな置換と定和性

組合せ問題への確率論的手法の有効性は、よく知られている ([3], [4])。問題 1, 2 の解 C_m と D_m ($m \geq 3$) を、確率論的アプローチに沿って研究したい。特にこれらの数列の $m \rightarrow \infty$ のときの振舞いに興味をもつ。ここで略述するのは、ランダムな置換 (a_i) の 2 次形式である s^2 (後の(11)式参照) を取り上げて、その期待値を求めるに過ぎないけれども、 s^2 の高次モーメント $E[s^{2k}]$ からラプラス変換 $E[e^{-\lambda s^2}]$ へと至るのが、われわれの研究目標である。著者の力及ばず、これらは今の所未解決となっている。

さて、 $2m$ 個の要素 $\{0, 1, 2, \dots, 2m-1\}$ の置換全体の集合を S_{2m} と記し、 S_{2m} の各点に等確率 $\frac{1}{(2m)!}$ を付与する。この集合 S_{2m} からランダムに一つの置換 $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2m-1})$ を選ぶとき、 m 個の数

$$(9) \quad x_1 = a_0 + a_1 + a_2, x_2 = a_2 + a_3 + a_4, \dots, x_m = a_{2m-2} + a_{2m-1} + a_0$$

を考え、その統計量 (標本平均および標本分散)

$$(10) \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i,$$

$$(11) \quad s^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2$$

を定義する。

定和性の条件 (1) は $s^2 = 0$ と同値である。従って § 1 の定理は次の形に述べ直される。

系 ランダムな置換 $(a_i) \in S_{2m}$ に対し、 $s^2 = 0$ が実現する確率 p_m は、

$$(12) \quad p_m = \frac{2mC_m}{(2m)!} = \frac{C_m}{(2m-1)!}$$

であり、 $3 \leq m \leq 7$ の範囲ではその数値は次表で与えられる。

m	3	4	5	6	7
p_m	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{840}$	$\frac{1}{60,480}$	$\frac{1}{1,995,840}$	$\frac{29}{1,556,755,200}$

S_{2m} 上の確率変数 \bar{x} と s^2 の ($m \rightarrow \infty$ のときの) 振舞いをみる手がかりとして、その期待値を計算しよう。

補題 3. S_{2m} 上のランダムな置換 (a_i) に対し、

$$i) \quad E[a_i] = \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{2m-1} k = m - \frac{1}{2} \quad (i = 0, 1, \dots, 2m-1);$$

$$ii) \quad Var[a_i] = \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{2m-1} k^2 - \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \left(m^2 - \frac{1}{4}\right) \quad (i = 0, 1, \dots, 2m-1);$$

$$iii) \quad a_i \text{ と } a_j (i \neq j) \text{ の相関係数は、} \rho = -\frac{1}{2m-1} \text{ となる。}$$

補題 3 の証明は容易なので、ここでは省略する。

命題 S_{2m} 上のランダムな置換から生じる \bar{x} と s^2 の期待値は次式で与えられる。

$$i) \quad E[\bar{x}] = 3 \left(m - \frac{1}{2}\right);$$

$$ii) \quad E[s^2] = \left(m^2 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{m+3}{3(m-1)(2m-1)}\right).$$

証明 i) $\bar{x} = \frac{1}{m} \left\{ \sum_{k=0}^{2m-1} k + \sum_{i=0}^{m-1} a_{2i} \right\} = 2m - 1 + \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} a_{2i}$ から

$$E[\bar{x}] = (2m-1) + \left(m - \frac{1}{2}\right) = 3\left(m - \frac{1}{2}\right) \text{ が従う。}$$

ii) まず、置換 (a_i) の 2 次形式である s^2 を、 $\alpha_i = a_i - E[a_i] = a_i - \left(m - \frac{1}{2}\right), i = 0, 1, 2, \dots, 2m$ (ただし、 $\alpha_{2m} = \alpha_0$ と約束する) を用いて書き直す。

$$\begin{aligned}
 (m-1)s^2 &= \sum_{i=1}^m \left\{ (a_{2i-2} + a_{2i-1} + a_{2i}) - (2m-1) - \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} a_{2j} \right\}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^m \left\{ (\alpha_{2i-1} + (1 - \frac{1}{m})(\alpha_{2i-2} + \alpha_{2i}) - \frac{1}{m} \sum_j^* \alpha_{2j}) \right\}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^m \left\{ (\alpha_{2i-1}^2 + (1 - \frac{1}{m})^2 (\alpha_{2i-2}^2 + \alpha_{2i}^2) + \frac{1}{m^2} \sum_j^* \alpha_{2j}^2) \right. \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^m \left\{ (1 - \frac{1}{m}) \alpha_{2i-1} (\alpha_{2i-2} + \alpha_{2i}) + (1 - \frac{1}{m})^2 \alpha_{2i-2} \alpha_{2i} - \frac{1}{m} \sum_j^* \alpha_{2i-1} \alpha_{2j} \right. \\
 &\quad \left. \left. - (1 - \frac{1}{m}) \frac{1}{m} \sum_j^* (\alpha_{2i-2} + \alpha_{2i}) \alpha_{2j} + \frac{1}{m^2} \sum_{j < j'}^* \sum_{j'}^* \alpha_{2j} \alpha_{2j'} \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

ここで、 \sum_j^* は $\{0, 1, \dots, m-1\} \setminus \{i-1, i\}$ 上を j が動くときの和を示す。

補題 3 の公式 ($\text{Var}[a_k] = \sigma^2$ と一時的におく) を適用すると、この式の期待値は次のようになる：

$$\begin{aligned}
 (m-1)E[s^2] &= m \left\{ 1 + 2(1 - \frac{1}{m})^2 + \frac{m-2}{m^2} \right\} \sigma^2 \\
 &\quad + 2m\rho\sigma^2 \left\{ 2(1 - \frac{1}{m}) + (1 - \frac{1}{m})^2 - \frac{m-2}{m} - (1 - \frac{1}{m}) \frac{2(m-2)}{m} + \frac{(m-2)(m-3)}{2m^2} \right\} \\
 &= 3\sigma^2(m-1) + \rho\sigma^2(m+3) = \frac{1}{3}(m^2 - \frac{1}{4}) \left\{ 3(m-1) - \frac{m+3}{2m-1} \right\}
 \end{aligned}$$

こうして、 $E[s^2]$ の公式が導かれる。

§ 4. おわりに

問題 1 および問題 2 を著者が考察するに至った経緯について、授業での実践と学生の熱心な取り組みを踏まえて、少し付言させていただきたい。

1) 週刊朝日連載の秋山仁先生のコラム (1996 年 9 月 6 日号) のおかげで、 $m=5$ の場合の問題 2 (五輪のマークに 1 から 9 までの数を入れて、定和性を成り立たせる問題) に最初興味を抱き、直ちに奇数の m に問題を一般化して補題 2 を証明した。この内容を 1996 年秋、愛知教育大学応用数学の授業において紹介した。

2) 次の年度、 $m=5$ の場合の問題 2 を前期試験の一問題として出題し、浜松医科大学一年生 100 名ほどによる答案の山の中から、4 通りもの解を見出し、補題 2 で与えられる (a_i) の他に、まだ 3 つもの解がある事実に一驚した。

3) 1997年冬休みのレポート課題として、上記4通りの解で全部尽されるのかどうか、前節で述べたランダムな置換の観点を織り込んで、問いかけた。提出されたいろいろなレポートの中で特筆すべきは、 $D_5 = 4$ の結果を証明した一学生が、もっとわかりやすい方法を見つけたので新しく書き直して来ましたと、再度レポートを提出したこと。このレポートを旧作と比べながら詳しくたどって行く途次、問題の背後に浮かびあがるグラフ構造に気付くことができた。そして $m = 6, 7$ の場合にも解を探索して、その多様さ ($D_6 = 10, D_7 = 65$ の結果としてまとめられる) に驚嘆し、年度の最後の授業で、§2で述べたのと類似の「グラフに基づく方法」を紹介した。

3) 1998年夏、問題2よりもむしろ円状に配置した鎖の輪に関する問題1の方が、種々の対称性を帯びることになり (特に補題1の有効性)、数学の問題としても興味深くなると考え、この論文に結実する結果を得た次第であります。

謝辞 断続的ではあるが、2年にもおよぶ著者のこの問題への取り組みに関して、飛躍の切っ掛けを与えてくれた管田美由紀さん (愛知教育大学総合科学課程4年生) にまず感謝申しあげたい。そして教師生活25年間の著者がこれまでに出会ったものの中で、最高の出来映えを示すレポートの一つを書ってくれた佐藤幸恵さんを始めとして、熱心に授業を聞き、レポート課題に多くの時間を費やして取り組んでくれた学生諸君、一人一人に心から感謝申しあげたいと思います。

論文の構成に関して、レフェリーから貴重な助言をいただきましたことに、深く感謝致します。

最後に清書と作図の労をとっていただいた鴨藤江利子さんに感謝の言葉を一言申し述べて、筆をおくことに致します。

参考文献

- [1] 大森清美, 新編魔方陣, 富山房, 1992年.
- [2] Liu, C.L., 組合せ数学入門 (伊理正夫, 伊理由美共訳), 共立出版, 1972年.
- [3] Frankl, P., 秋山仁, 現代組合せ論, 共立出版, 1987年.
- [4] Alon, N., Spencer, J.H., The probabilistic method, John Wiley & Sons, 1992.

Received on December 9, 1998

Accepted on January 29, 1999